Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \to \dfrac{2ax}{x^2+a}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ in der größtmöglichen, von a abhängigen Definitionsmenge $D_a \subseteq \mathbb{R}$.
5	1.1	Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_a sowie Anzahl und Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.
7	1.2	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und berechnen Sie $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} f_a(x)$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an.
7	1.3	Bestimmen Sie a so, dass der Graph von f_a Extrempunkte besitzt, und berechnen Sie deren Abszissen. Begründen Sie mit dem Steigungsverhalten des Graphen von f_a die Art der Extrempunkte.
		[Mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = 2a\cdot(-x^2+a)\cdot(x^2+a)^{-2}$]
	1.4.0	Setzen Sie nun $a = 4$ und betrachten Sie die Funktion f_4.
3	1.4.1	Geben Sie die Definitionsmenge D_4 an und bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 1.3 die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_4.
10	1.4.2	Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f_4 und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_4.
5	1.4.3	Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und geeigneter, zusätzlich berechneter Funktionswerte den Graphen von f_4 für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm
3	1.4.4	Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_F der Funktion $F : x \to 4\cdot\ln(x^2+4)$ an und zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion der Funktion f_4 ist.
5	1.4.5	Die Verbindungsstrecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Hochpunkt des Graphen von f_4 schließt mit dem Graphen von f_4 ein Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.3, berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts und geben Sie diese in der Form $k_1 + k_2\cdot\ln(2)$ mit reellen Zahlen k_1 und k_2 an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A II:*	
4	1.4.6	Ermitteln Sie diejenigen Geraden aus dem Geradenbüschel g_m mit der Funktionsgleichung $g_m(x) = m\cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, die mit dem Graphen von f_4 genau einen Punkt gemeinsam haben.
	2.0	Gegeben ist die Gleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung: $s(t) = 15\cdot e^{-0,2\cdot t}\cdot\cos(3,927\cdot t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \ge 0$. Die Elongation s ist dabei in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Physikalische Einheiten bleiben unberücksichtigt. Gerundete Ergebnisse sind mit drei Nachkommastellen anzugeben.
2	2.1	Berechnen Sie die Elongation zur Zeit $t_0 = 0,3$ und geben Sie die größte auftretende Elongation s_{max} an.
6	2.2	Bestimmen Sie den kleinsten Wert von t, für den die Elongation $s = 0$ ist, zeigen Sie, dass das Zeitintervall Δt zwischen zwei Nulldurchgängen konstant bleibt und berechnen Sie Δt.
4	2.3	Ermitteln Sie den Funktionsterm der Geschwindigkeit $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$ und berechnen Sie v(0,3), also die Geschwindigkeit zur Zeit $t_0 = 0,3$. Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens von v(0,3).
9	2.4	Ermitteln Sie mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens den kleinsten Wert von t, für den die Elongation $s = 6$ ist. Begründen Sie, warum $t_0 = 0,3$ einen geeigneten Startwert darstellt, führen Sie zwei Näherungsschritte durch und erläutern Sie das Ergebnis hinsichtlich der Genauigkeit des durchgeführten Verfahrens.
70		